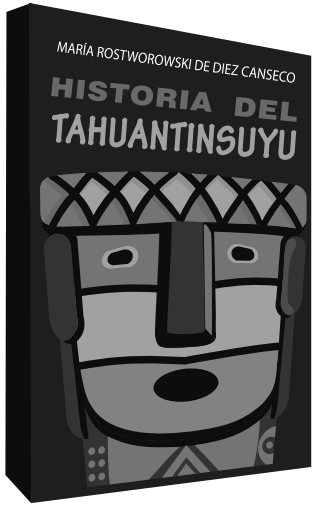
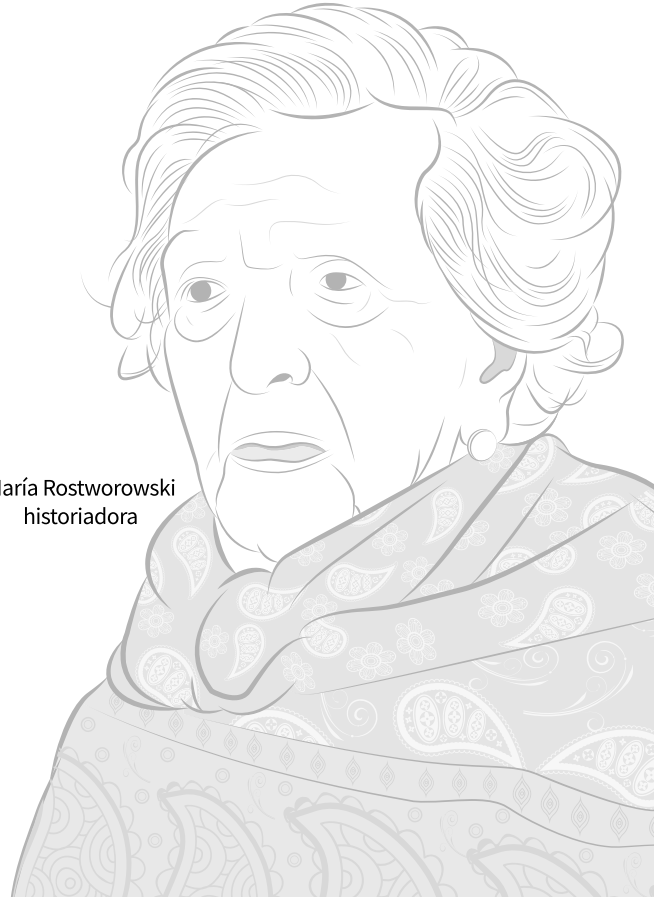
ACADEMIA ADUNI
CREEMOS EN LA EXIGENCIA

Semana 7
Trigonometría

Semestral Intensivo Virtual ADUNI 2020





María Rostworowski
historiadora

Lumbreras Editores

Identidades fundamentales II

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES

$$\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

Prueba

$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)^2=(1)^2$$
$$\operatorname{sen}^4\theta+2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$$
$$\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

$$\operatorname{sen}^6\theta+\cos^6\theta=1-3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

Prueba

$$(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)^3=(1)^3$$
$$\operatorname{sen}^6\theta+\cos^6\theta+3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\underbrace{(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}_{1}=1$$
$$\operatorname{sen}^6\theta+\cos^6\theta=1-3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

$$\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\csc\theta$$

Prueba

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$
$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}$$
$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{1}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}$$
$$\tan\theta+\cot\theta=\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

$\rightarrow$ $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\csc\theta$

$$\sec^2\theta+\csc^2\theta=\sec^2\theta\csc^2\theta$$

Prueba

$$\sec^2\theta+\csc^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$$
$$\sec^2\theta+\csc^2\theta=\frac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}$$
$$\sec^2\theta+\csc^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}$$

$\rightarrow$ $\sec^2\theta+\csc^2\theta=\sec^2\theta\csc^2\theta$

Propiedad

Si a y b son constantes reales y θ variable real, tal que

$a\operatorname{sen}\theta+b\cos\theta=c$ y $a^2+b^2=c^2$

entonces, se cumple que

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{a}{c}\ \text{ y }\ \cos\theta=\frac{b}{c}$$

Ejemplo

Si $3\operatorname{sen}\theta+4\cos\theta=5$, halle $\tan\theta$.

Resolución

Se observa que $3^2+4^2=5^2$.

Por propiedad anterior, se cumple que

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{3}{5}\ \text{ y }\ \cos\theta=\frac{4}{5}$$

Entonces

$$\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}$$

Observación

- $(1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^2=2(1+\operatorname{sen}\theta)(1+\cos\theta)$
- $(1+\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)^2=2(1+\operatorname{sen}\theta)(1-\cos\theta)$
- $(1-\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)^2=2(1-\operatorname{sen}\theta)(1-\cos\theta)$
- $(1-\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^2=2(1-\operatorname{sen}\theta)(1+\cos\theta)$

ACADEMIA ADUNI CREEMOS EN LA EXCELENCIA

Problemas resueltos

1. Si $\operatorname{sen}x\cos x=\frac{1}{2}$

   calcule $\frac{\tan^2 x+\cot^2 x}{\tan^5 x+\cot^5 x}$.

Resolución

Del dato

$$\operatorname{sen}x\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \sec x\csc x=2$$

$$\tan x+\cot x=2$$

$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=2$$

$$\tan^2 x+1=2\tan x$$

$$\tan^2 x-2\tan x+1=0$$

$$(\tan x-1)^2=0$$

$$\rightarrow \tan x=1 \quad \rightarrow \quad \cot x=1$$

Se pide calcular

$$K=\frac{\tan^2 x+\cot^2 x}{\tan^5 x+\cot^5 x}$$

$$\therefore\ K=1$$

2. De la condición
   $\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x=n$

   calcule $\frac{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}{\operatorname{sen}^2 x+\cos^4 x}$.

Resolución

$$\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x=n$$

$$1-3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x=n$$

$$1-n=3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$$

$$\rightarrow \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x=\frac{1-n}{3}$$

Se pide hallar

$$M=\frac{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}{\operatorname{sen}^2 x+\cos^4 x}$$

$$M=\frac{1-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{1-\cos^2 x+\cos^4 x}$$

$$M=\frac{1-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{1-\cos^2 x(1-\cos^2 x)}$$

$$M=\frac{1-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{1-\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x}$$

$$M=\frac{1-2\left(\frac{1-n}{3}\right)}{1-\left(\frac{1-n}{3}\right)}$$

$$M=\frac{\frac{3-2(1-n)}{3}}{\frac{3-(1-n)}{3}}$$

$$\therefore\ M=\frac{1+2n}{2+n}$$

ACADEMIA ADUNI CREEMOS EN LA EXIGENCIA

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO

1. En un aula del ciclo semestral San Marcos, el profesor Renato indica que la suma de los cuadrados de la secante y la cosecante de un ángulo agudo es 9. Luego, el profesor pide determinar el valor del producto del seno y el coseno de dicho ángulo. Un alumno rápidamente indica el valor pedido por el profesor. ¿Cuál será dicho valor?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{5}$

2. Si $\text{sen}6°+\cos 6°=m$, calcule la expresión $(\tan 6°+\cot 6°)(m-1)$ en términos de m.

A) $\frac{2}{2m+1}$ B) $\frac{2}{m+1}$

C) $\frac{2}{2m-1}$ D) $\frac{1}{m+1}$

3. Durante la compaña escolar, un padre de familia compra
$q=\left(\text{sen}^6 x+\cos^6 x+3\text{sen}^2 x\cos^2 x+11\right)$
cuadernos al precio de
$P=\{(2+\tan x)(2+\cot x)-2\sec x\csc x\}$
soles cada uno.
¿Cuánto paga por los q cuadernos?

A) S/40 B) S/70
C) S/60 D) S/50

4. Si el doble del seno de un ángulo x más el triple del coseno del mismo ángulo es $\sqrt{13}$, entonces halle el valor de

$$\left[\frac{\sec^2 x\csc^2 x}{\tan x+\cot x}\right]^3-3\sec x\csc x-\cot^3 x$$

A) $\frac{1}{125}$ B) $\frac{8}{27}$

C) $\frac{27}{64}$ D) $\frac{27}{8}$

5. En un aula del ciclo semestral San Marcos; el profesor Alberto indica que la suma de cuadrados de la tangente y la cotangente de un ángulo agudo es 7. Luego, el profesor pide determinar el valor del producto de secante y cosecante de dicho ángulo. Un alumno rápidamente indica el valor pedido por el profesor ¿cuál será dicho valor?

A) 4 B) 3
C) 2 D) $\frac{5}{2}$

6. Si $\text{sen}5°-\cos 5°=a$, calcule la expresión $\tan 5°+\cot 5°-2$ en términos de a.

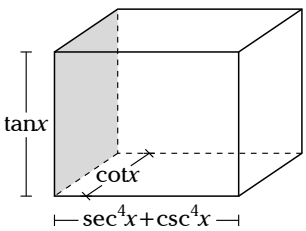
A) $\frac{1-a^2}{2a^2}$ B) $\frac{2a}{1-a^2}$

C) $\frac{2a^2}{1+a^2}$ D) $\frac{2a^2}{1+a^2}$

7. Durante la campaña escolar, un padre de familia compra
$q=(\text{sen}^4 x+\cos^4 x+5+2\text{sen}^2 x\cos^2 x)$
cuadernos al precio de
$P=\{(\sec x\csc x)^2-(\tan x-\cot x)^2\}$ soles
cada uno. ¿Cuánto paga por los q cuadernos?

A) S/22 B) S/18
C) S/20 D) S/24

8. Del gráfico mostrado, si el perímetro de la cara lateral sombreada del paralelepípedo rectangular es 6 u, calcule su volumen.



A) 44 u^3 B) 70 u^3
C) 63 u^3 D) 50 u^3

ACADEMIA ADUNI CREEMOS EN LA EXCELENCIA

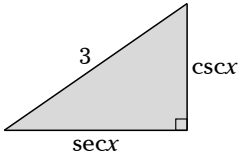
9. Si la expresión

$M = a(\text{sen}^4 x + \cos^4 x) + 3(\text{sen}^6 x + \cos^6 x)$

es independiente de x, calcule $M+a$.

A) -3 B) -2 C) -5 D) -6

10. Del gráfico mostrado, calcule el área de la región triangular.



A) 3 u^2 B) 0,5 u^2 C) 1,5 u^2 D) 2,5 u^2

11. Dos ciudades M y N están unidas mediante una autopista rectilínea. Un automóvil sale de la ciudad M hacia la ciudad N con velocidad constante de $3(\tan x+\cot x)^2$ km/h, donde x es ángulo agudo y después de $(1-\text{sen}^4 x-\cos^2 x)$ horas sufre un desperfecto. Si la distancia entre las ciudades M y N es 7 km, ¿a qué distancia de la ciudad N se produjo el desperfecto?

A) 2 km B) 3 km C) 4 km D) 5 km

12. Simplifique la siguiente expresión.

$\sqrt{\sec^2 x \csc^2 x - 4} + \tan x;\ 0 < x < \frac{\pi}{4}$

A) $2\tan x - \cot x$ B) $\tan x$
C) $-\cot x$ D) $\cot x$

13. Reduzca la siguiente expresión.

$\frac{\tan^3 x + \cot^3 x}{\tan x + \cot x} + 3\tan x \cot x$

A) $\text{sen}^2 x \cos^2 x$
B) $\tan^2 x \text{sen}^2 x$
C) $\cot^2 x \cos^2 x$
D) $\sec^2 x \csc^2 x$

14. Sea

$$f_{(x)} = \left[\frac{\tan^2 x + \cot^2 x}{\sec^2 x \csc^2 x - 2\tan x \cot x} - \cos^2 x\right] (\tan x + \cot x)$$

Entonces halle el valor de $f_{\left(\frac{53^\circ}{4}\right)}$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{5}-2$ C) $5-\sqrt{7}$ D) $13-\sqrt{10}$

15. Si se cumple que

$3\,\text{sen}\, x - \cos x = 3\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta = \sqrt{10}$

halle el valor de

$\text{sen}x \csc\theta - \cos x \sec\theta + 2$

A) 1 B) 2
C) 0 D) 4

16. Si el doble del seno de un ángulo θ más el quíntuple del coseno del mismo ángulo es $\sqrt{29}$, entonces halle el valor de $\sqrt{29}(\text{sen}\theta + \cos\theta)$.

A) 11 B) 5
C) 7 D) 6

ACADEMIA ADUNI CRECEMOS EN LA EXIGENCIA

ACADEMIA

ADUNI

CREEMOS EN LA EXIGENCIA

955 148 975 | 480 0048
www.aduni.edu.pe